

Concursul MateInfoUB 2024
- 12 mai 2024 -

1. Pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, notăm cu $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo n . Dacă în acest inel opusul lui $\hat{5}$ este $\hat{29}$, iar inversul lui $\hat{5}$ este $\hat{24}$, atunci n este egal cu:

- ☐ A 17 ☐ B 34 ☐ C 119 ☐ D 29 ☐ E 43

2. Numărul natural n este soluție a ecuației $\log_2(\log_2(\log_2 n)) = 3$. Despre numărul de cifre ale lui n putem afirma că este:

- ☐ A între 5 și 10 ☐ B între 11 și 20 ☐ C între 21 și 50 ☐ D între 51 și 100 ☐ E între 101 și 500

3. Pentru câte valori ale numărului natural a , mulțimea $(\sqrt{a}, \sqrt{10a}) \cap \mathbb{Z}$ are exact 5 elemente?

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E o infinitate

4. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Valoarea lui a pentru care graficul lui f împarte dreptunghiul de vârfuri $(0, 0), (a, 0), (0, a^2 + 1)$ și $(a, a^2 + 1)$ în două regiuni cu arii egale este:

- ☐ A $\sqrt{3}$ ☐ B $\sqrt{2}$ ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E nu există un astfel de număr

5. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq b$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + ax^3 + b$ astfel încât tangentele la graficul lui f în punctele de abscise $x = a$ și $x = b$ sunt paralele. Atunci $f(1)$ este egal cu:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C $-\sqrt{2}$ ☐ D $\sqrt{2}$ ☐ E -1

6. Câte numere complexe z verifică egalitățile $|z| = |z - 1| = |z - i|$?

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 3 ☐ D 4 ☐ E o infinitate

7. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ și G_f graficul acestei funcții. O dreaptă arbitrară d ce trece prin punctul $P(1, 2)$ intersectează G_f în punctele A și B . Pentru câte astfel de drepte, P este mijlocul segmentului AB ?

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 4 ☐ E o infinitate

8. Triunghiul ABC are $AB = 8, AC = 3$ și $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$. Raportul dintre raza cercului înscris în acest triunghi și raza cercului circumscris triunghiului este:

- ☐ A $\frac{2}{7}$ ☐ B $\frac{3}{8}$ ☐ C $\frac{1}{2}$ ☐ D $\frac{4}{7}$ ☐ E $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

9. Fie $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Notăm cu $Tr(BA)$ suma elementelor de pe diagonală principală a matricei BA . Atunci suma $Tr(BA) + \det(BA)$ este:
☐ A 8 ☐ B 15 ☐ C 17 ☐ D 23 ☐ E 25

10. Câte permutări din S_5 au exact o inversiune (unde S_5 este mulțimea permutărilor de 5 elemente)?
☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 4 ☐ D 5 ☐ E 10

11. Numărul valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ astfel încât inegalitatea $(a^2 + 1)^x + 1 \geq 12^x + 5^x$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este:
☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 4 ☐ D o infinitate ☐ E alt răspuns

12. Despre limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{3} \right) \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx \right)$ se poate spune că:
☐ A nu există ☐ B este egală cu 0 ☐ C este egală cu ∞ ☐ D este egală cu $\frac{\pi}{3}$ ☐ E este egală cu $\frac{e}{3}$

13. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții pare astfel încât graficele lor spre $+\infty$ au asimptotele $y = 2x - 1$, respectiv $y = -3x + 1$. Asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției $f \circ g$ are ecuația:
☐ A $y = 6x - 3$ ☐ B $y = -6x + 1$ ☐ C $y = -x$ ☐ D $y = -6x + 4$ ☐ E $f \circ g$ nu are asimptotă spre $+\infty$

14. Pe un cerc alegem la întâmplare 2024 de puncte distincte; ele determină un poligon convex. Ducem dintr-un vârf oarecare al acestui poligon cele 2021 de diagonale, formând astfel 2022 de triunghiuri. Numărul minim posibil de triunghiuri obtuzunghice obținute în acest mod este:
☐ A 4 ☐ B 2019 ☐ C 2020 ☐ D 1012 ☐ E 2021

15. Fie punctele $A(1, 5), B(5, 3), C(x, 0), x \in \mathbb{R}$. Valoarea minim posibilă a perimetrului triunghiului ABC este:
☐ A $6\sqrt{5}$ ☐ B $\sqrt{29} + \sqrt{20} + \sqrt{13}$ ☐ C $10 + 2\sqrt{5}$ ☐ D $5\sqrt{5}$ ☐ E $6 + 2\sqrt{5}$

16. Un punct aflat pe cercul înscris într-un pătrat se află la distanță 3, respectiv 6, de cele mai apropiate laturi ale pătratului. Aria pătratului este egală cu:
☐ A 900 ☐ B 225 ☐ C 450 ☐ D 36 ☐ E 81

17. Pe mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$ sunt definite operațiile algebrice $\oplus$ și $\odot$ astfel încât $(M, \oplus, \odot)$ este corp. Dacă $a \oplus b = c$ atunci despre $b \odot d$ putem afirma că:
☐ A este a ☐ B este b ☐ C este c ☐ D este d ☐ E nu se poate preciza, depinde de operațiile $\oplus$ și $\odot$

18. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ o secvență formată cu 100 de numere naturale cu proprietatea: din oricare trei termeni consecutivi, unul este media aritmetică a celorlalți doi. Dacă $a_1 = 1$ și $a_2 = 2$, atunci numărul maxim de termeni ai secvenței egali cu 0 este:
☐ A 33 ☐ B 0 ☐ C 98 ☐ D 50 ☐ E 100

19. Pentru un număr real arbitrar a notăm cu $[a]$ partea sa întreagă. Numărul natural $n \geq 4$ pentru care $[\log_2 4] + [\log_2 5] + \dots + [\log_2 n] = 2024$ este:
☐ A 315 ☐ B 316 ☐ C 317 ☐ D 318 ☐ E 313

20. Fie $A = \left\{ \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Atunci cel mai mic element al mulțimii A :
☐ A este $-\frac{3}{2}$ ☐ B este 0 ☐ C este $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ D este -2 ☐ E nu există

21. Pentru un număr natural a scris în baza 10 notăm cu $s(a)$ suma cifrelor sale. Despre limita șirului $\left(\frac{s(n^2)}{s(n)^2}\right)_{n \geq 1}$ putem spune că:
☐ A este 0 ☐ B este 1 ☐ C este e ☐ D este $+\infty$ ☐ E nu există

22. Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1-\sin 1} + \frac{1}{n+2-\sin\left(\frac{1}{2}\right)} + \cdots + \frac{1}{n+n-\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$ este egală cu:
☐ A 0 ☐ B ∞ ☐ C 1 ☐ D $\ln 2$ ☐ E $\cos 1$

23. Desenăm triunghiul ABC cu $AB = 10$, $BC = 7$ și $m(\widehat{BAC}) = \theta$; avem exact două triunghiuri necongruente cu aceste date. Știind că unul dintre ele are aria de trei ori mai mare decât aria celuilalt, atunci $\cos \theta$ este egal cu:
☐ A $\frac{\sqrt{17}}{5}$ ☐ B $\frac{\sqrt{51}}{15}$ ☐ C $\frac{\sqrt{34}}{8}$ ☐ D $\frac{1}{3}$ ☐ E alt răspuns

24. Considerăm în plan punctul $A(a, b)$ cu $0 < b < a$ și a, b numere întregi. Fie B simetricul lui A față de dreapta de ecuație $y = x$, C simetricul lui B față de axa Oy , iar D simetricul lui C față de dreapta de ecuație $y = x$. Numărul perechilor (a, b) pentru care aria patrulaterului $ABCD$ are valoarea 2024 este:
☐ A 0 ☐ B 4 ☐ C 6 ☐ D 8 ☐ E 12